KRASJKURS I MAT102

v2015
Kim-Erling Bolstad-Larssen

LINEÆRE LIKNINGSSYSTEMER

$$\begin{matrix} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + \dots + A_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan-operasjoner

- Addere et tall ganger en likning til en annen likning
- Gange en rad med et tall $\neq 0$
- Bytte rekkefølgen på rader

H2013-3)

a) $$\begin{matrix} 4x - 6y = 2 \\ -8x + 6y = -1 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 2 \\ -8 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{matrix} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $2x + 4y + 3z = 14$
$4x + 8y + z = 8$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 14 \\ 4 & 8 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ z = 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 - 2y \\ z = 4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2y \\ y \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) I MATLAB gir rref ut følgende matrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvilke løsninger får vi ut?

$$\begin{array}{ll} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 - x_5 = 2 & \Leftrightarrow x_1 = 2 - 2x_3 + x_5 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 3 & \Leftrightarrow x_2 = 3 - 2x_3 - x_5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 0 & \Leftrightarrow x_4 = -x_5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1 & \Leftrightarrow 0 = 1 \end{array}$$

Vi ser at vi får $0=1$ i sist likning, så det finnes ingen løsning. I tillegg ser vi at x_3 og x_5 er frie variabler (parametere).

Inverser

La A være en $n \times n$-matrise, og la I være $n \times n$-identitetsmatrisen. Vi leter etter en A^{-1} s.a. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Dersom $\det(A)=0$, eksisterer ikke A^{-1} (vi sier at matrisen A er singulær). Dersom A^{-1} eksisterer ($\det(A) \neq 0$), sier vi at A er invertibel.

Dersom A er invertibel, har vi at $(A \,\vdots\, I) \sim (I \,\vdots\, A^{-1})$

Eks: Finn inversmatrisen A^{-1} til $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ eksisterer ikke.}$$

Eks: Finn inversmatrisen A^{-1} til $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ eksisterer.}$$

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) = (I \,\vdots\, A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

Determinanter

2×2: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3×3: $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$

Egenverdier og egenvektorer

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\det(A - \lambda I) = 0$, $\vec{v}$ = Løsningen til $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

V2014-1c) Finn egenverdiene og egenvektorene til $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Egenverdier: $\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(2-\lambda) - 4\cdot 1 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$

Egenvektorer:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1-(-2) & 1 \\ 4 & 2-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Velger } x_2 = 1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -2$$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-3 & 1 \\ 4 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow 4x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4}x_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Velger } x_2 = 4$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3$$

Alternativ (kun vist for λ_2): $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 = 3\vec{v}_2$

$$\cancel{\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -4x + y = 3x \Leftrightarrow y =}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x + y = 3x \Leftrightarrow y = 4x \\ 4x + 2y = 3y \Rightarrow y = 4x \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Velger $x = 1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Differensiallikningssystemer

$\vec{y}\,' = A\vec{y}$, Gen. løsning: $\vec{y} = \sum_i C_i \vec{V_i} e^{\lambda_i t}$, hvor

C_i er konstanter, $\vec{V_i}$ er egenvektorer og λ_i egenverdier

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gir løsningen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \vec{V_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{V_2} e^{\lambda_2 t}$

~~V2014-1)~~

$\cancel{y_1' = -y_1 + y_2}$

H2013-1) a) Finn egenverdier og egenvektorer til $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Egenverdier: $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 1\cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$

Egenvektorer:

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + 3y = \lambda x \Rightarrow y = \frac{\lambda - 2}{3} x \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-2}{3} \end{pmatrix}$$

$\vec{V_1} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - 2}{3} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-2}{3} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Velger $x = 3$, s.a. $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{V_2} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - 2}{3} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5-2}{3} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Velger $x = 1$, s.a. $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Løs systemet av differensiallikninger: $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}}}$$

c) Løs initialverdiproblemet: $y_1(0)=2$, $y_2(0)=2$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{1\cdot 0} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\cdot 0} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \iff \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}}}$$

Eulers metode

Problem: Gitt $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $y(x+\Delta x) \approx y(x) + \Delta x\, y'(x)$

MATLAB:
1. $\text{Deltax} = \Delta x$
2. $N = \frac{b-a}{\text{Deltax}}$
3. $x(1) = a$
4. $y(1) = y_0$
5. for $i = 2:N$
6. $x(i) = x(i-1) + \text{Deltax}$
7. $y(i) = y(i-1) + \text{Deltax} * y'(i-1)$
8. end
9. Plot(x,y)

V2013-4) $y' = \cos(x^2 y^2)$, $y(0) = 4$, $[0,2]$

1. $\text{Deltax} = 0.01$
2. $N = \frac{2-0}{0.01}$
3. $x(1) = 0$
4. $y(1) =$ [Fyll inn]
5. for $i = 2:N$
6. $x(i) =$ [Fyll inn]
7. $y(i) =$ [Fyll inn]
8. end
9. Plot(x,y)

4. $y(1) = 4$

6. $x(i) = x(i-1) + \text{Deltax}$

7. $y(i) = y(i-1) + \text{Deltax} * (\cos(x(i-1)^2 * y(i-1)^2))$

b) Skriv et program som løser $y' = 2 - x^y$, $y(2) = 3.5$, $[2, 6]$

1. Deltax = 0.01
2. $N = \frac{6-2}{0.01}$
3. x(1) = 2
4. y(1) = 3.5
5. for i = 2 : N
6. x(i) = x(i-1) + Deltax
7. y(i) = y(i-1) + Deltax * x(i-1)^ y(i-1)
8. end
9. Plot (x, y)

c) $y'' = x \sin(y') + 0.2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ $[0, 5]$

Velg $z = y'$, $y'' = z'$, $z' = x \sin(z) + 0.2y$

Skriv et program som løser $y'' = x \sin(y') + 0.2y$

1. Deltax = 0.01
2. $N = \frac{5-0}{\text{Deltax}}$
3. x(1) = 0
4. y(1) = 1
5. z(1) = 3
6. for i = 2 : N
7. x(i) = x(i-1) + Deltax
8. y(i) = y(i-1) + Deltax * z(i-1)
9. z(i) = z(i-1) + Deltax * (x(i-1) + sin(z(i-1)) + 0.2 * y(i-1))
10. end

Eksistens og unikhet av løsning

Gitt $g(x) = h(x)$, $x \in [a, b]$. Finnes det en løsning?

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x) = 0$

Dersom 1. f er kontinuerlig, og
2. $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, slik at $f(x_1) < 0$ og $f(x_2) > 0$

Da finnes det en løsning

Unik løsning? Dersom vi har plkt 1 og 2 over, og f samtidig er monotont økende eller avtakende på $[a, b]$, vil løsningen være unik.

Dersom $f'(x) > 0$ på hele $[a, b]$: Monotont økende
— " — $f'(x) < 0$ ——— " ——— avtakende

Newtons metode

Estimer x^* s.a. $f(x^*) = 0$

1. $x = x_0$ % kvalifisert gjetting
2. feilgrense : ε
3. while(abs(f(x)) > feilgrense)
4. $\quad x = x - f(x)/f'(x)$
5. end

H2014-2) $\tan x = x^2 - 1$ $\quad f(x) = \tan x - x^2 + 1 = 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

f. kontinuerlig i $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x^2 + 1\right) = -\infty < 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\tan x - x^2 + 1\right) = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$$

$\Rightarrow f$ har en løsning.

Unik løsning?

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} > 0 \ \forall x, \quad -2x > 0 \ \forall x < 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow$ Monotont økende

$\Rightarrow$ Unik løsning

Løsning av likningen med Newtons metode:

```
1: x=-1
2: Feilgrense=10^(-5)
3: while(abs(tan(x)-x^2+1)>Feilgrense
4:     x=x-(tan(x)-x^2+1)/(((1/cos(x))^2-2x)
5: end
```

V2013-2) $\cos x = \tan 2x$

a) Hva skjer i løkken?

```
x = 0
feilgrense = 0.0001
while(abs(cos(x) - tan(2*x)) > feilgrense
    x = x - (cos(x) - tan(2*x))/(-sin(x) - 2/cos(2*x)^2)
end.
```

$\Rightarrow$ x oppdateres til tangentens nullpunkt til f i forrige verdi

b) $x = 0.3747$, altså $x - f(x)/f'(x)$

Men $x = 3 \longrightarrow x = -3.5163$, hvorfor?

Vi har flere nullpunkter

c) Modifiser koden til å løse $e^{\sqrt{x}} = 3x$.

$f(x) = e^{\sqrt{x}} - 3x = 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - 3$

```
x = 0
feilgrense = 0.0001
while (abs(exp(sqrt(x)) - 3x) > feilgrense)
    x = x - (exp(sqrt(x)) - 3x)/((exp(sqrt(x))/2*sqrt(x)) - 3)
end
```

Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \frac{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}(a+i\Delta x)}{2}$$

n: Antall delintervaller

MATLAB:

```
1.  n=N              % Antall delintervaller
2.  a=a
3.  b=b
4.  deltax = (b-a)/n          % Lengde på hvert delintervall
5.  integralet = f(a)
6.  for x=a+deltax:deltax:b-deltax
7.      integralet = integralet+2f(x)
8.  end
9.  integralet = integralet + f(b)
10. integralet = ~~integralet/2~~ deltax*integralet/2
```

Dersom $f''(x)$ er kontinuerlig og $|f''(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$, gitt $E_T = \int_a^b f(x)dx - T_n$, vil tilfredsstille $|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$

$(|E_T| < \varepsilon)$

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$$

P2013-12) a) $\int_0^3 \cos(\sin(x))\,dx$ med trapesmetoden

```
n=100
a=0
b=3
deltax=(b-a)/n
integralet=cos(sin(a))
for x=a+deltax:deltax:b-deltax
    integralet=integralet+2*cos(sin(x))
end
integralet=integralet+cos(sin(b))
integralet=deltax*integralet/2
```

n er antall delintervaller som $[0,3]$ er delt opp i

b) $\int_{-1}^{2} \log(4+e^x)\,dx$ med trapesmetoden

```
n=100
a=-1
b=2
deltax=(b-a)/n
integralet=log(4+exp(a))
for x=a+deltax:deltax:b-deltax
integralet=integralet+2*log(4+exp(x))
end
integralet=integralet+log(4+exp(b))
integralet=deltax*integralet/2
```

Partielle differensiallikninger

Eks Gitt $\dfrac{\partial C}{\partial t} = 0.2\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$

Sjekk at $C(x,y,t) = 3 + e^{-t}\cos(2x)\sin(y)$ er en løsning

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -e^{-t}\cos(2x)\sin(y)$$ (Venstre side)

Høyre side:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -2e^{-t}\sin(2x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{-t}\sin(2x)\sin(y)\right) = -4e^{-t}\cos(2x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = e^{-t}\cos(2x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-t}\cos(2x)\cos(y)\right) = -e^{-t}\cos(2x)\sin(y)$$

$$0.2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) = 0.2\left(-4e^{-t}\cos(2x)\sin(y) - e^{-t}\cos(2x)\sin(y)\right)$$

$$= 0.2\cdot\left(-5e^{-t}\cos(2x)\sin(y)\right) = -e^{-t}\cos(2x)\sin(y) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Venstre side = Høyre side

Lagrangemetoden

Gitt $f(x,y)$, $D_f = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$

1. $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ (Løs likningen)
2. Bruk Lagrange på randen
3. Sjekk $f(x,y)$ for alle kandidater

Eks: $f(x,y) = x^4 + y^2$, $D_f = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) $\nabla f(x,y) = (4x^3, 2y) = (0,0) \Rightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

b) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 = \lambda 2x \Rightarrow \lambda = \frac{4x^3}{2x} = 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 2y = \lambda 2y \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{2y} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

På randen: $x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y\neq 0,\ x=0:\ 0^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$y=0,\ x\neq 0:\ x^2+0^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$y\neq 0,\ x\neq 0:\ (x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Punkt	Verdi	
$(0,0)$	$0^4+0^2=0$	MIN
$(0,\pm 1)$	$0^4+(\pm 1)^2=1$	MAX
$(\pm 1,0)$	$(\pm 1)^4+0^2=1$	MAX
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$	MIN PÅ RANDEN

Eks: Fra oblig 4

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 2y - 3, \quad D_f = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 20\}$$

a) f er kontinuerlig på et lukket, begrenset område, og har følgelig både max og min.

b) 1. ordens partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

2. ordens partiellderiverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

c) Stasjonære punkter: $\nabla f = 0$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x-4, 2y-2) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (2,1)$$

d) Klassifisering vha. andrederiverttesten:

$$\Delta = \cancel{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta > 0 \Rightarrow \text{Lokalt minimum}$$

e) Ekstremalpunkter på randen:

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 20 \quad , \quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (2x-4, \; 2y-2)$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

$2x - 4 = \lambda 2x \quad , \quad 2y - 2 = \lambda 2y$

$$\lambda = \frac{2x-4}{2x} = \frac{2y+2}{2y}$$

$$\frac{x-2}{x} = \frac{y+1}{y}$$

$$y(x-2) = x(y+1)$$

$$xy - 2y = xy + x$$

$$x = -2y \qquad (*)$$

$x^2 + y^2 = x^2 + (-2x)^2 = 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vi ser også at x og y har motsatt fortegn fra $(*)$

$\Rightarrow (x,y) = (\pm 4, \mp 2) \Rightarrow (x,y) = (4,-2)$ eller $(x,y) = (-4,2)$

$f(4,-2) = 4^2 - 4 \cdot 4 + (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$

$f(-4,2) = (-4)^2 - 4(-4) + 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 37$

$(-4,2)$ er maks på randen, $(4,-2)$ er min på randen.

Andrederiverttesten

$f = f(x,y)$ i et ekstremalpunkt (x_0, y_0)

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

Hvis $\Delta < 0$: Sadelpunkt

Hvis $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$: Lokalt minimum

Hvis $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$: Lokalt maksimum

Hvis $\Delta = 0$: Ingen informasjon

Eks: 4f fra oblig 4

Klassifiser $(4,-2)$ vha. andrederiverttesten:

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

$(4,-2)$ er et lokalt minimum.