Krasjkurs – MAT101 og MAT111

Forord

Disse notatene ble skrevet under et åtte timer (to firetimers forelesninger) i løpet av 10. og 11. desember 2012. Det er mulig at noen av utregningene ikke stemmer, enten fordi jeg har skrevet feil av fra boken jeg noterte i, eller fordi det har skjedd en regnefeil. Jeg brukte mange timer på å digitalisere notatene, noe som vises i antall sider jeg har skrevet.

Disse forelesningene var felles for fagene MAT101 og MAT111, men noe av innholdet er bare målrettet mot MAT111. Eksempler på emner som bare er rettet mot MAT111 er implisitt derivasjon, deler av taylorpolynomet (f. eks ved feilberegning), noen integrasjonsteknikker (f.eks. invers substitusjon) og estimering av integrasjon, samt den formelle definisjonen av grenseverdier.

I integrasjonsteknikker var vi ikke innom uegentlige integraler på krasjkurset, men jeg nevnte (veldig raskt) hva det gikk ut på. I tillegg kunne jeg ha lagt til Simpsons metode, men den uteble.

Det er også noen typer oppgaver som har blitt gitt til eksamen (i følge foreleser på krasjkurset) i MAT101, samt en tidligere oppgave på eksamen i MAT101. De er merket med rød skrift på gul bakgrunn.

Noen steder kan utregningen ha gått for fort for seg, slik at det ble vanskelig å få med seg alle stegene, for eksempel på type III-differensiallikningen. Så hvis det blir uklart der, kan jeg dessverre ikke gjøre noe, jeg husker ikke hvordan man regnet ut slike differensiallikninger.

Utover det håper jeg at du som leser disse notatene har glede av dem, for jeg har brukt mye tid på å digitalisere dem. Heldigvis har ikke det vært helt bortkastet tid, ettersom jeg da har fått gått gjennom alt en gang til.

Ironisk nok har disse notatene jeg har skrevet blitt nesten like lange som seminaroppgavene i Ex. Phil, men det får så være. Det blir forhåpentligvis mer glede og nytte i å lese disse notatene enn Ex. Phil-oppgavene.

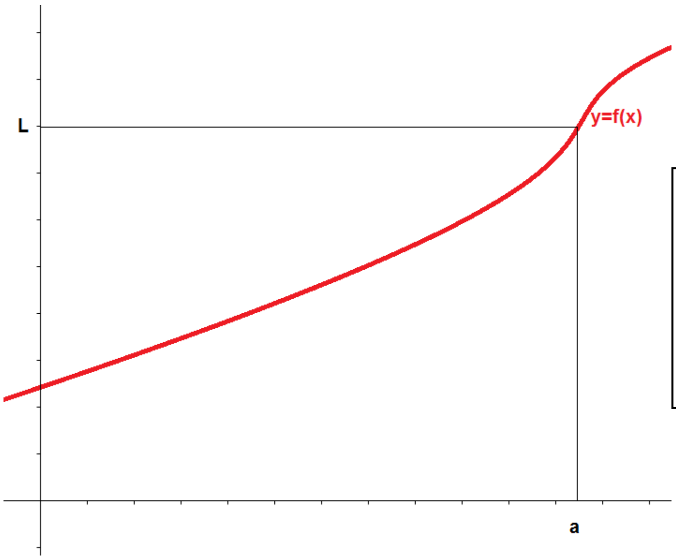
Lykke til med eksamen

Kim-Erling Bolstad-Larssen

PS: Disse notatene kan fritt videreformidles med eller uten vederlag, under forutsetning av at de er 100 % uforandret.

Grenser

$\lim_{x \to a} f(x) =$ __ betyr: Hva skjer med f når x går mot a?



Høyresidig grense: $\lim_{x \to a+} f(x)$ Venstresidig grense: $\lim_{x \to a-} f(x)$

Fremgangsmåte:

- Prøv å sette inn. Får du tall, har du grensen.
- Ved ubestemt form ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 * \infty$, 0^0, 1^∞, $\infty - \infty$ osv) må vi omforme:
  - Felles brøkstrek
  - Faktorisere og forkorte
  - Kvadratsetninger/fullføre kvadratet
  - I tilfeller med $\left[\frac{0}{0}\right]$ og $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ kan vi bruke l'Hôpitals regel.

Eksempel:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5^x - 2^x}{7^x - 2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5^x\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)}{7^x\left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right)} = \lim_{x \to \infty} \left(\left(\frac{5}{7}\right)^x * \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x} \right) = 0 * 1 = \mathbf{0}$$

NB: En slik oppgave kommer på eksamen i MAT101

Kontinuitet

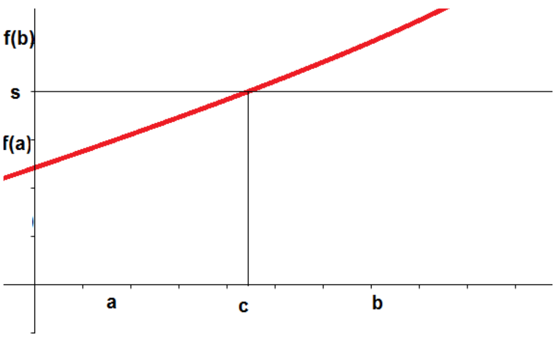
Def: En funksjon f er kontinuerlig i punktet a dersom:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to a-} f(a) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

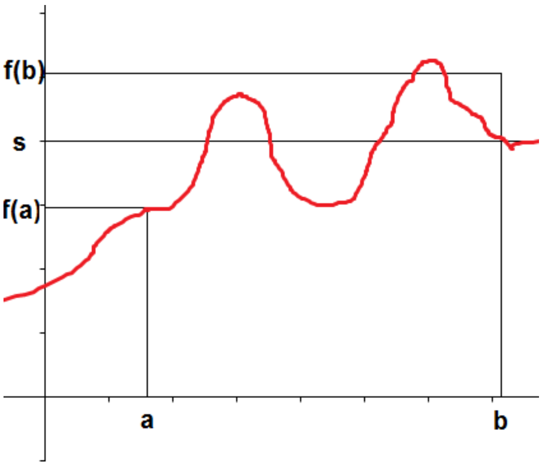
- Funksjonen er kontinuerlig på intervall dersom den er kontinuerlig i alle punkter i intervallet
- Alltid kontinuerlige funksjoner:
  - Polynomer
  - Trigonometriske funksjoner
  - Rasjonale funksjoner
- En funksjon kan bare være kontinuerlig der den er definert
- Husk regler for kombinasjon av kontinuerlige funksjoner

Skjæringssetningen (IVT – Intermediate Value Theorem)

En funksjon f er kontinuerlig på $[a, b]$ og s er et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$. Da finnes det et tall $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = s$.



Kan grafen krysse s flere ganger? JA. Hvis det er et kritisk punkt som får grafen til å snu og krysse s på nytt.



Beklager min dårlige tegnede graf, det er ikke lett å tegne en graf på frihånd på PC…

Men poenget mitt er der fortsatt!

Eks: Vis at $cos(x) = x$ et sted på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\cos(x) = x \Rightarrow \cos(x) - x = 0$

La $f(x) = \cos(x) - x$

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$
f er kontinuerlig (trigonometrisk funksjon minus polynom)

=> det finnes en $r \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ slik at $f(r) = 0$ av IVT.

Eks: Er $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 0{,}99x & x > 1 \end{cases}$ kontinuerlig i $x = 1$?

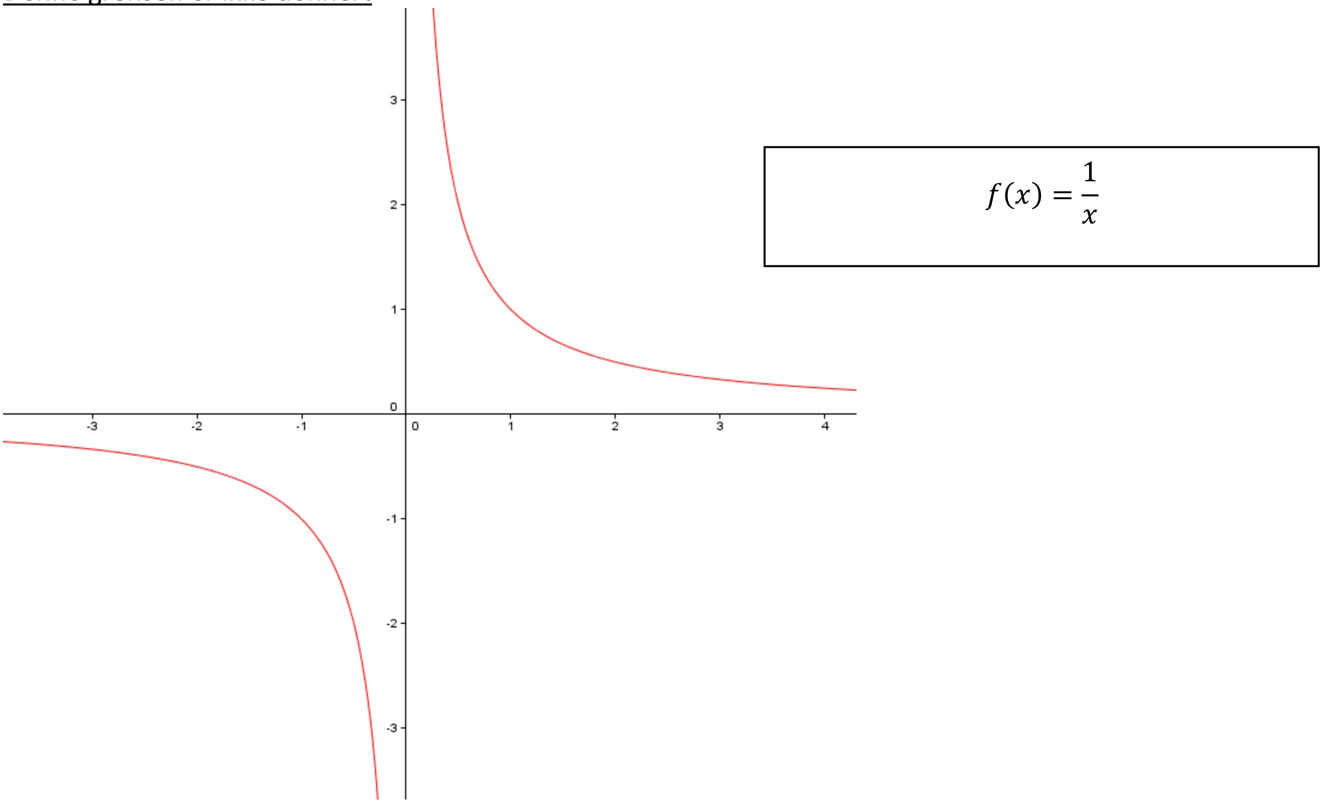
Kontinuerlig hvis $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1^2 = 1$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} 0{,}99x = 0{,}99 * 1 = 0{,}99$$

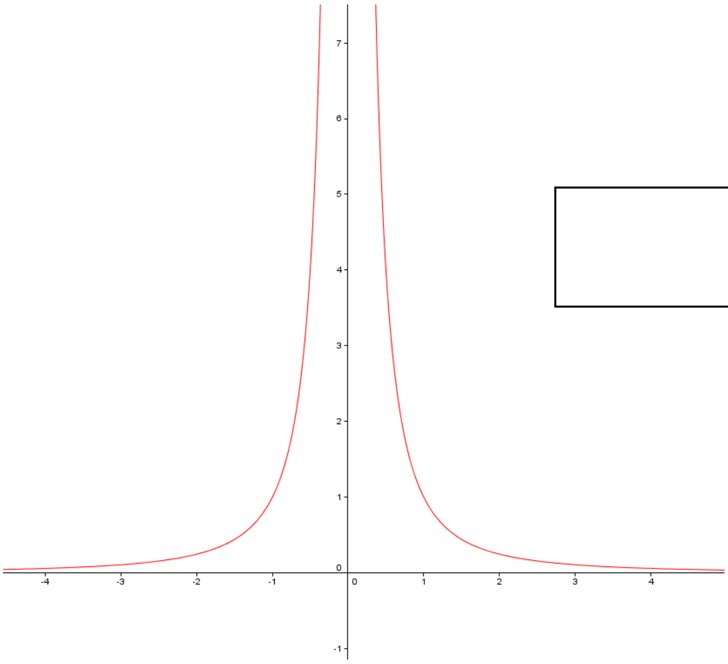
Siden $\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$ er f ikke kontinuerlig i $x = 1$.

Når er en grense uendelig, og når er den ikke definert?

$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ og $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$
Siden $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x}$, eksisterer ikke $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$
Denne grensen er ikke definert



$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = \infty$ og $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$
Siden $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$ er $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
Denne grensen er definert, og går mot uendelig



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Altså: Når $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$, er grensen definert. Den er ellers ikke definert.

Derivasjon

Def: $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Den deriverte i et punkt x_0: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dersom $f'(x_0)$ er en endelig grense.
$f'(x_0)$ er også stigningstallet til tangenten i $f(x_0)$.

Likning for tangenten i et punkt (x_0, y_0): $\boldsymbol{y_t = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$

Derivasjonsteknikker:

- Må kunne basisderiverte (polynomer, trigonometriske funksjoner, e^x osv)
- Kjerneregelen
- Produktregelen/kvotientregelen
- Implisitt derivasjon

NB: Det kommer minst to oppgaver med derivasjonsteknikker på eksamen i MAT101

Kjerneregelen:

Brukes ved sammensatte funksjoner: $f(x) = f\big(u(x)\big)$
Da er $f'(x) = f'(u) * u'(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx}$$

Eks: $f(x) = \sqrt{x^3+2} = \sqrt{u}$

$$\frac{df}{du} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3+2} = \frac{d}{du}\sqrt{u} * \frac{d}{dx}(x^3+2) = \frac{1}{2\sqrt{u}} * 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$$

Produktregelen:

Brukes, som navnet tilsier, til å derivere produkter
$(u * v)' = u' * v + u * v'$, hvor $u = u(x)$ og $v = v(x)$

Eks: $(4x\ lnx)' = 4\ lnx + 4x * \frac{1}{x} = 4\ lnx + 4$

Kvotientregelen:

Brukes til å derivere brøker

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' * v - u * v'}{v^2}$, hvor $u = u(x)$ og $v = v(x)$

Eks:

$$\left(\frac{x+2}{x^2+4}\right)' = \frac{1(x^2+4) - (x+2) * 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-4x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2-4x+4}{(x^2+4)^2}$$

Implisitt derivasjon:

Anta at den ene variabelen kan skrives som en funksjon av den andre, og deriver. Dvs: $y = y(x)$.
Eks: Finn likningen for tangent i punktet $(-1, 2)$ for $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$

$$(x^2y^3 - x^3y^2)' = 2x * y^3 + x^2 * 3y^2 * y' - (3x^2 * y^2 + x^3 * 2y * y')$$
$$= 2x * y^3 + x^2 * 3y^2 * y' - 3x^2 * y^2 - x^3 * 2y * y' = 0$$

$x^2 * 3y * y' - x^3 * 2y * y' = 3x^2 * y^2 - 2x * y^3$

Setter inn $x = -1$ og $y = 2$:

$(-1)^2 * 3 * 2 * y' - (-1)^3 * 2 * 2 * y' = 3 * (-1)^2 * 2^2 - 2 * (-1) * 2^3$
$6y' + 4'y = 6 + 16$
$10y' = 22$
$y' = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

$$y_t = y'(x - x_0) + y_0 = \frac{11}{5}(x + 1) + 2 = \frac{11}{5}x + \frac{11}{5} + 2 = \frac{11}{5}x + \frac{21}{5}$$

L'Hôpitals regler:

Krav: f og g er deriverbare rundt a og $g'(x) \neq 0$ der. Denne regelen kan bare brukes i tilfellene hvor grenseverdien blir $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$.
Dersom $\lim_{x\to a} f(x) = L$, da er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Eks: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} => \left[\frac{0}{0}\right]$
Både teller og nevner er deriverbare, og nevner derivert blir ikke 0 rundt $x = 0$. Da kan vi bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2*1} = \frac{1}{2}$$

Eks: $\lim_{x\to 0+} x\ln x => [0*(-\infty)]$
Her må vi omforme, slik at vi kan bruke l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} => \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] = -\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

Eks: $\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} => [1^\infty]$
La $y = (1+\tan x)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \ln(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+\tan x) = \frac{\ln(1+\tan x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x)}{x}\right) => \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\tan x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\tan x}*(\tan^2 x+1)}{1} = \frac{\frac{1*1}{1}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 1 => \lim_{x\to 0} y = e^{\lim_{x\to 0}\ln y} = e^1 = e$$

Kan man vise til at denne ligningen er definisjonen på e?

Tegning av graf

Hvilken informasjon kan vi hente ut av grafen f?

- $f(x)$
  - Nullpunkter: $f(x) = 0$
  - Asymptoter (horisontale, vertikale og diagonale)
    - Horisontale asymptoter: når $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$
    - Vertikale asymptoter: når $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (ikke def)
    - Diagonale/skrå asymptoter: når $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$
  - Andre punkter
- $f'(x)$
  - Når vokser f?: $f'(x) > 0$
  - Når synker f?: $f'(x) > 0$
  - Ekstremalpunkter:
    - Endepunkter
    - Kritiske punkter: $f'(x) = 0$ (topp-/bunnpunkter)
    - Singulære punkter: når $f'(x)$ er udefinert
    - Brukes ofte i maksimerings- og minimeringsoppgaver (Ekstremalverdiproblemet)
      - Eks: «Finn største volum til figuren» => $V' = 0$
- $f''(x)$
  - Konkavitet (krumming)
  - Vendepunkter: $f''(x) = 0$

Eks: Finn skrå asymptote til en rasjonal funksjon

1. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hvor $P(x)$ er av grad $n+1$ og $Q(x)$ er av grad n. Begge er polynomer.
2. Polynomdivisjon
3. $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$, hvor $R(x)$ er et polynom av grad $n-1$
4. De verdiene som er funnet til $ax+b$ er den skrå/diagonale asymptoten

Eks: Finn skrå asymptote til $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2+x+2}}$

$$f(x) = x^3 : x^2 + x + 2 = \cdots = x - 1 + \frac{-x+2}{x^2+x+2}$$

Den skrå asymptoten er $y = x - 1$

Taylorpolynom

Metode for å estimere en funksjonsverdi til f rundt punktet $x = a$. Antar at $f(a)$ er kjent.

$$f(x) \approx P_n(x) = \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Med feilledd: $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, hvor
$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ for en s mellom a og x.

Eks: Lag et taylorpolynom av grad 2 for $f(x) = \sqrt{x}$ om $x = 1$

$$f(x) = \sqrt{x} => f(1) = \sqrt{1} = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} => f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} => f''(1) = -\frac{1}{4\sqrt{1^3}} = -\frac{1}{4}$$

$$P_2(x) = f(x) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(x)}{2}(x-a)^2 = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

NB: Det som kommer videre nedover her om taylorpolynomer er ikke pensum i MAT101, men lett stoff og anbefalt å lære seg.

Bruk dette taylorpolynomet til å estimere $\sqrt{2}$:

$$f(2) \approx P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$$

Finn feilleddet og undersøk om estimatet er for stort eller for lite:

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{6}(2-1)^3 = \frac{1}{6} * \frac{3}{8\sqrt{s^5}} = \frac{1}{16\sqrt{s^5}}$ for en s mellom 1 og 2.

Siden det er en brøk, vet vi at brøken blir størst når nevneren blir minst. Vi vet også at $f(x) = \sqrt{x}$ vokser, så brøken blir størst når $s = 1$. Altså:

Maks verdi av feilen: $0 < \frac{1}{16\sqrt{2}} < E_2(2) < \frac{1}{16\sqrt{1^5}} = \frac{1}{16}$

Siden feilleddet er positivt, vet vi at estimatet ble for lite.

Anslått verdi av $\sqrt{2}$ ved bruk av taylorpolynomet og feilleddet er altså:

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{11}{8} + \frac{1}{16}$$
$$\frac{22}{16} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

Kommentar: Vi vet at den nedre grensen på anslått verdi kan økes til $\frac{22}{16} + \frac{1}{16\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, men da må vi regne ut med $\sqrt{2}$ på kalkulatoren, og da kunne vi like gjerne ha tastet inn $\sqrt{2}$ der.

Integrasjonsteknikker

- Substitusjon
- Delvis integrasjon
- Delbrøkoppspaltning
- Invers substitusjon
- Uegentlige integraler/sammenligning
- Estimere (midtpunktregelen, trapesoide, Simpsons metode)

NB: Substitusjon og delvis integrasjon kommer på eksamen i MAT101

Substitusjon:

Eks: $\boldsymbol{I = \int xe^x\, dx}$

La $u = x^2$, $= 2x\, dx$, $dx = \frac{du}{2x}$

$$\mathrm{I} = \int \boldsymbol{xe^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C}$$

Eks: $\boldsymbol{I = \int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\, dx}$

$u = 4x^2 + 1 \qquad du = 8x\, dx \qquad dx = \frac{du}{8x}$

$$I = \int \frac{x}{u^5} * \frac{du}{8x} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{8}\int u^{-5}\, du = \frac{1}{8} * \left(-\frac{1}{4}\right)u^{-4} + C = -\frac{1}{32}u^{-4} + C = -\frac{1}{32u^4} + C$$

Eks: $\boldsymbol{I = \int_0^4 x^3\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} dx}$

$$\int_0^4 x^3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^4 \frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int_0^4 \frac{x * x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$u = x^2 + 1 \qquad du = 2x\, dx \qquad dx = \frac{du}{2x}$

Finner de nye grenseverdiene:
$x = 0 => u = 0^2 + 1 = 1$
$x = 4 => u = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

$$=> I = \int_1^{17} \frac{x(u-1)}{u^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^{17} \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \frac{1}{2}\int_1^{17}\left(\frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\right) du = \frac{1}{2}\int_1^{17}\left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right]_1^{17}$$

$$= \left[\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right]_1^{17}$$

$$= \frac{1}{3} * 17^{\frac{3}{2}} - 17^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3} * 1^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{17^{\frac{3}{2}}}{3} - 17^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{17^{\frac{3}{2}} - 3 * 17^{\frac{1}{2}} - 4}{3}$$

Substitusjon passer bra når det er én grad forskjell mellom teller og nevner. Den substituerte verdien skal kunne fjerne alle andre variabler. Ofte velges u til å være det som står i parenteser, røtter, eksponenter osv.

Delvis integrasjon:

Delvis integrasjon brukes når man skal integrere et produkt. Det er egentlig regelen for derivasjon av produkt som er snudd litt om på.

$$\int u'(x) * v(x)\ dx = u(x) * v(x) - \int u(x) * v'(x)\ dx$$

Eks:

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\pi} x \sin 2x\, dx}$$

$$u = x \quad du = 1\,dx = dx \quad dv = \sin 2x\ dx \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

La J være det ubestemte integralet til I:

$$\begin{aligned} J &= -\frac{x}{2}\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\ dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \end{aligned}$$

$$I = [J]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi + C - \left(-\frac{0}{2}\cos 2 * 0 + \frac{1}{4}\sin 2 * 0 + C\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2} * 1 + \frac{1}{4} * 0 + C + 0 * 1 - \frac{1}{4} * 0 - C$$
$$= -\frac{\pi}{2}$$

Eks:

$$\boldsymbol{I = \int \ln x\, dx}$$

$$I = \int \ln x\ dx = \int 1 * \ln x\ dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx \qquad dv = 1\,dx \qquad v = x$$

$$\begin{aligned} I &= \int 1 \ln x\,dx = x\ln x - \int x * \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C \end{aligned}$$

Eks:

$$\boldsymbol{I = \int e^x \cos x\, dx}$$

$$u = e^x \qquad du = e^x\,dx \qquad dv = \cos x\ dx \qquad v = \sin x$$

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$u = e^x \qquad du = e^x\,dx \qquad dv = \sin x\ dx \qquad v = -\cos x$$

$$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\,dx\right)$$

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

$$I = \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Delbrøkoppspaltning:

Delbrøkoppspaltning brukes for å integrere en rasjonal funksjon: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Her må $P(x)$ være av lavere grad enn $Q(x)$ for kunne bruke delbrøkoppspaltning. Dersom det ikke er tilfelle, benytt polynomdivisjon, slik at:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x + a_n + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Faktoriser nevneren så langt det lar seg gjøre. Nå kan vi få tre tilfeller:

1. Når nevneren kan skrives som et produkt av lineære faktorer:

Eks:

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x-3)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}\right) dx$$

Til å begynne med: Gang med fellesnevnere

$$\frac{1}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

$$=> 1 = 0x^2 + 0x + 1 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Da får vi i dette tilfellet tre likninger med tre ukjente:

$$(A+B+C)x^2 = 0x^2$$
$$(-2A-3B+C)x = 0x$$
$$-3A = 1$$

Ordne likningene:

$$(A+B+C)x^2 = 0x^2 => A+B+C = 0$$
$$(-2A-3B+C)x = 0x => -2A-3B+C = 0$$
$$-3A = 1$$

Finn verdiene til de ukjente variablene A, B, C (evt D, E, F dersom det er flere variabler)

$$\boldsymbol{A = -\frac{1}{3}}$$
$$B + C = -A = \frac{1}{3}$$
$$-3B + C = 2A = -\frac{1}{3}$$

$$C = \frac{1}{3} - B$$
$$-3B + C = -3B + \frac{1}{3} - B = -4B + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$-4B = -\frac{2}{3} => \boldsymbol{B = \frac{1}{6}}$$

$$C = \frac{1}{3} - B = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{1}{6}}$$

Da har vi at

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x-3)}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x\ +1} + \frac{\frac{1}{6}}{x-3} \right) dx$$
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}dx$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x+1| + |\frac{1}{6}\ln x - 3| + C$$

2. Høyere ordens faktorer i nevneren som ikke kan faktoriseres ytterligere:

Eks:

$$\int \frac{1}{x(x^2+x+2)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} \right) dx$$

(Telleren skal være et polynom med én grad lavere enn nevneren).

Videre: Sett på felles brøkstrek, sammenlign tellerne, løs for hver variabel (A, B, C ...) og løs integralet. Se i forrige tilfelle («Når nevneren kan skrives som et produkt av lineære faktorer») for videre fremgang.

3. Repeterte faktorer

Brukes, som navnet tilsier, når en faktor i nevnerpolynomet gjentas minst én gang.

Eks:

$$\int \frac{x+5}{x(x+1)(x+4)^3}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2} + \frac{E}{(x+4)^3} \right) dx$$

Videre: Som i de to andre tilfellene: Sett på felles brøkstrek, løs for hver variabel, og løs integralet. I dette tilfellet skal alle tellerne i uttrykket være av første grad. Se ellers i første tilfelle («Når nevneren kan skrives som et produkt av lineære faktorer») for videre fremgang.

Invers substitusjon:

Invers substitusjon brukes i tilfeller der vi får integraler som har følgende innhold:

- $\sqrt{a^2 - x^2},\ a > 0$ (bruk $\sin^{-1}$ – substitusjon)
- $\sqrt{a^2 + x^2}$ (bruk $\tan^{-1}$ – substitusjon)
- $\frac{1}{x^2+a^2}$ (bruk $\tan^{-1}$ – substitusjon)
- $\sqrt{x^2 - a^2}$ (bruk $\sec^{-1}$ – substitusjon)

Eks:

$$\boldsymbol{I = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{a}\sin\theta = 3\sin\theta \qquad \theta = \sin^{-1}\frac{x}{3} \qquad dx = 3\cos\theta\ d\theta$$

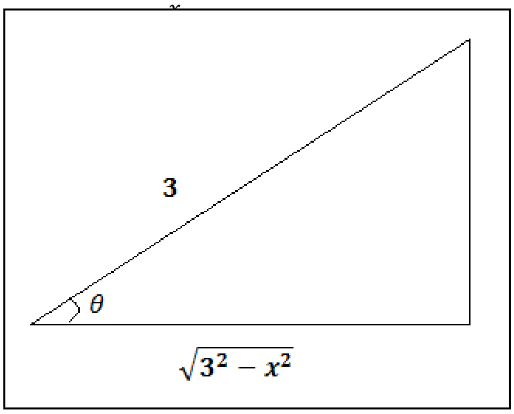
$$I = \int \frac{3^2\sin^2\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} * 3\cos\theta\ d\theta = \int \frac{9\sin^2\theta * 3\cos\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}}\ d\theta$$

$$= \int \frac{9\sin^2\theta * 3\cos\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}}\ d\theta = \int \frac{9\sin^2\theta * 3\cos\theta}{3\cos\theta}\ d\theta$$

$$= \int 9\sin^2\theta \, d\theta = \int 9 * \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$

Nå har vi funnet verdien for θ, nå skal vi finne verdien for x:



$$=> \sin\theta = \frac{x}{3}$$

$$=> \cos\theta = \frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{3}$$

$$=> \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3} * \frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{9}\right) + C$$

Uegentlige integraler:

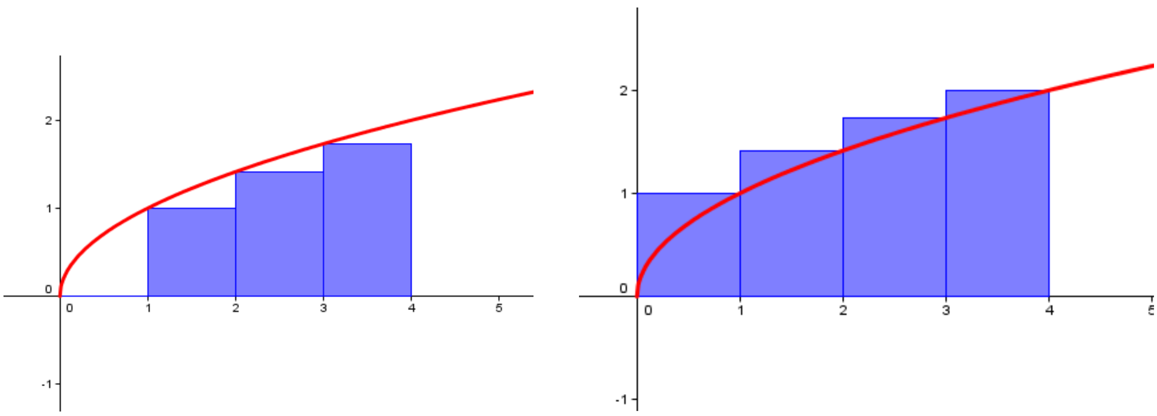
Uegentlige integraler brukes når du skal ta integralet av en verdi som ikke er definert. Da bruker man grenseverdien på det området eller den verdien. Dette emnet ble ikke tatt opp på krasjkurset, men det står om det i Calculus.

Estimering av integraler:

Vi har flere metoder for å estimere integraler. Jeg kommer til å nevne noen av dem.

Riemannsummene:

Når vi skal regne ut integralet under grafen ved å bruke rektangler og regne arealet av hvert rektangel og legge sammen. Vi har en øvre og en nedre riemannsum. Den nedre riemannsummen vil gi for lite integral i forhold til det nøyaktige integralet, øvre riemannsummen gir for stort. Jo flere rektangler vi bruker, jo mer nøyaktig resultat, men dermed også mer å regne.



Bildet til venstre over viser nedre riemannsum, $L(f, P)$, og bildet til høyre over viser øvre riemannsum, $U(f, P)$.
P: partisjon=oppdeling av delintervall. Trenger ikke å være like stort på hver søyle, men det blir lettere å regne med dersom det er .

Eks: Regn ut øvre og nedre riemannsum for $f(x) = \sqrt{x}$ i området $x \in [0, 4]$ ved bruk av 4 like store søyler.

$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

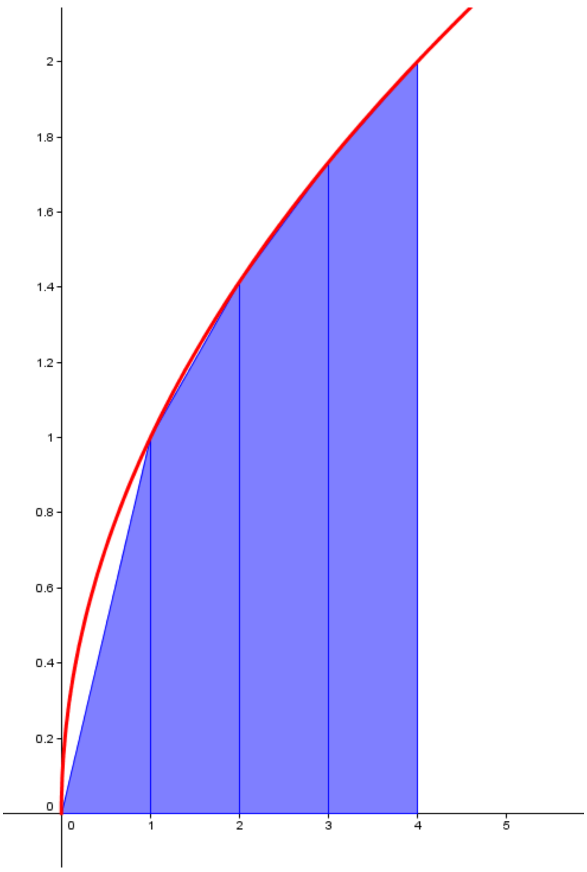
$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$

$L(f, P) = \Delta x\big(f(0) + f(1) + f(2) + f(3)\big)$
$= 1\big(\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}\big)$
$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$
$= \sum_{i=1}^{3} \sqrt{i}$

$U(f, P) = \Delta x\big(f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\big)$
$= 1\big(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}\big)$
$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$
$= \sum_{i=1}^{4} \sqrt{i}$

Trapesmetoden (trapezoid)

En slags mellomting mellom øvre og nedre riemannsum. Her lager vi trapeser i stedet for rektangler.



Areal under grafen $f(x) = \sqrt{x}$ for området $x \in [0, 4]$ ved bruk av trapesmetoden. Trapesmetoden gir stor nøyaktighet for denne grafen. Det vises godt hvis du ser på enhetene på y-aksen. Også her vil nøyaktigheten bli større jo flere trapeser som tas arealet av, men dermed vil det også bli mer å regne ut.

Trapesmetoden regnes ut ved å regne ut arealene for hvert trapes og legge sammen. Formelen er som følger: $T_n = \Delta x\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)\right)$. Det forutsettes at hvert trapes har samme bredde for å bruke denne formelen. Dersom det er ulik bredde på de forskjellige trapesene, må du regne ut arealet av hvert enkelt trapes for seg og legge sammen.

Eks: Estimer arealet under grafen $f(x) = \sqrt{x}$ for $x \in [0, 4]$, ved bruk av 4 trapeser.

$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$T_4 = \Delta x\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \frac{1}{2}f(4)\right)$$
$$= 1\left(\frac{1}{2}\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4}\right)$$
$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$$
$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$
$$\approx 5{,}1463$$

Differensiallikninger

Jeg har tatt for meg to typer differensiallikninger: Separable differensiallikninger og 1. ordens lineære differensiallikninger.

Separable differensiallikninger:

Som navnet tilsier, er det mulig å separere variablene i de separable differensiallikningene.

Eks:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$
$$y^2 = -x^2 + C$$
$$C = x^2 + y^2$$

I dette tilfellet får vi at $C = x^2 + y^2$, som egentlig er r^2, dvs. at formelen vi har, er formelen for en sirkel.

Eks: Radioaktivt henfall

$N = N(t)$: antall radioaktive kjerner

$N(0) = N_0$

$N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{N_0}{2}$

$\frac{dN}{dt} = -kN, \qquad k > 0$

Konstant løsning:

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N(t) = 0$$

Regner ut:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

$$\frac{dN}{N} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k\,dt$$

$$\ln|N| = -kt + C_1$$
$$e^{\ln|N|} = |N| = N = e^{-kt+C_1} = e^{-kt} * e^{C_1} = Ce^{-kt}$$

$|N| = N$ fordi vi ikke kan ha negativt antall radioaktive kjerner

$$N = N(t) = Ce^{-kt}$$

$$N(0) = Ce^{-k*0} = C = N_0$$

$$N(t) = N_0e^{-kt}$$

$$N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = N_0e^{-kt_{\frac{1}{2}}} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-kt_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln e^{-kt_{\frac{1}{2}}} = -kt_{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$=> k = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

$$N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} * t}$$

1. ordens lineære differensiallikninger

$$a * \frac{dy}{dt} + p(x)y = q(x)$$

Hvis den $a \neq \{0, 1\}$, må du dele på a. Jeg har tatt høyde for at $a = 1$ i denne fremgangsmetoden. Likningen blir $\frac{dy}{dy} + \frac{p(x)y}{a} = \frac{q(x)}{a}$, dersom $a \neq \{0, 1\}$. Dersom $a = 0$, blir det en vanlig likning, og ikke differensiallikning (og den alternative likningen over blir ugyldig, grunnet divisjon med null).

Finn integrerende faktor, ganger inn:

$$e^{\mu} = e^{\wedge} \int p(x)\, dx$$

$$e^{\mu}\left(\frac{dy}{dy} + p(x)y\right) = e^{\mu} * q(x)$$

Produktregelen gir:

$$\frac{d}{dx}(e^{\mu} * y) = e^{\mu} * q(x)$$

Integrer:

$$\int \frac{d}{dx}(e^{\mu} * y)\, dx = e^{\mu} * y = \int e^{\mu} * q(x)\, dx$$

Eks:

$$\mathbf{2\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = 2x^2}$$

Isolerer den deriverte:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2$$

Finner integrerende faktor:

$$e^{\mu} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Ganger inn:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y\right) = \frac{1}{x^2} * x^2 = 1$$

Produktregelen gir:

$$\frac{1}{x^2}y = \int 1\, dx = x + C$$

$$y = x^3 + Cx^2$$

Eks: Luftmotstand (fysikkeksempel)

m: massen til objektet, konstant
v: farten til objektet, variabel
k: konstant
g: tyngdeakselerasjonen, konstant
t: tiden

$$\boldsymbol{\Sigma F = ma = m\frac{dv}{dt}}$$

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - kv}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Integrerende faktor:

$$e^{\mu} = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

$$e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v\right) = e^{\frac{k}{m}t} * g$$

$$\int \frac{dv}{dt}\left(e^{\frac{k}{m}t} * v\right)dt = \int e^{\frac{k}{m}*t} * g\,dt$$

$$e^{\frac{k}{m}t} * v = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C$$

$$v = v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(0) = \frac{mg}{k} + C = v_0 => C = v_0 - \frac{mg}{k}$$

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}*t}$$

Eks: Temperaturen i et badekar – Tidligere eksamensoppgave i MAT101
$x(t)$: Temperaturen til vannet i badekaret
$x(0) = 16$℃
Romtemperatur er konstant 24℃

$$\boldsymbol{\frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt} = \lambda(24 - x(t))}$$

Løses som en Type III differensiallikning:

$$\frac{dx}{dt} = a(x - A)(x - B)$$

$$x(t) = A + \frac{B - A}{1 + Ce^{a(B-A)t}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda(x - 0)(x - 24) = -\lambda x(x - 24)$$

$$x(t) = \frac{24}{1 + Ce^{-24\lambda t}}$$

Kim-Erling Bolstad-Larssen
Krasjkurs i MAT101 og MAT111
10-11. desember 2012

Den formelle definisjonen av grenseverdier

(Noen ganger kalt epsilon-delta, $\varepsilon - \delta$)

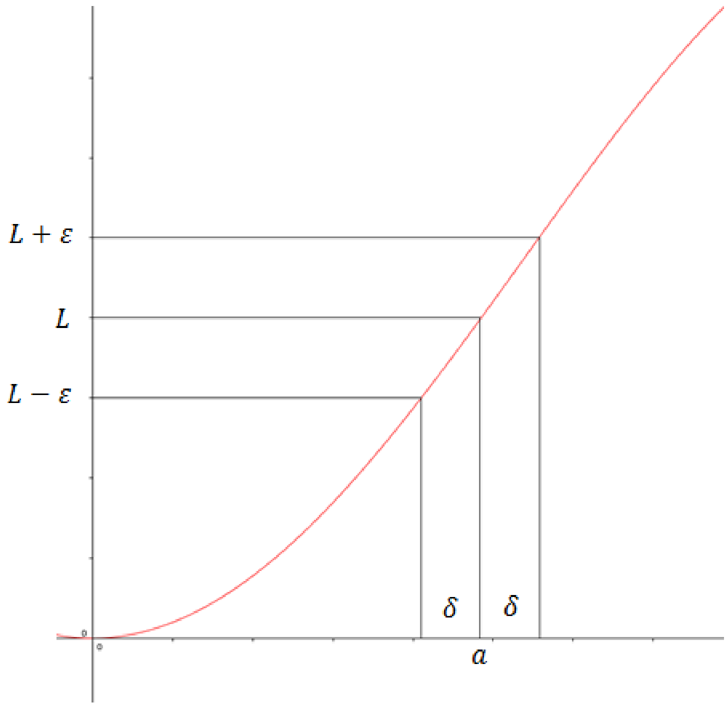
Vi har tre forskjellige måter å bruke den formelle definisjonen av grenseverdier:

1. Grensen går mot et tall, funksjonsverdien er et tall (ikke $\pm\infty$)
2. Grensen går mot $\pm\infty$, funksjonsverdien er et tall (ikke $\pm\infty$)
3. Grensen går mot et tall, funksjonsverdien er $\pm\infty$

Det finnes et tilfelle når grensen går mot $\pm\infty$ og funksjonsverdien går mot $\pm\infty$, men det er ikke tatt med her.

Når grensen går mot et tall, og funksjonsverdien er et tall (ikke $\pm\infty$)

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ oppfylles hvis:
«Gitt $\varepsilon > 0$, eksisterer det en $\delta > 0$ slik at $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$»
(alltid med på oppgavebesvarelsen)



Hvis du ser nøye på x-aksen, ser du at det ikke er samme verdi på begge δ-ene. I slike tilfeller må man velge den *minste* av de to, fordi det skal gjelde på begge sider av a.

Eks: Bruk den formelle definisjonen for grenseverdier til å vise at $\lim_{x\to 2} 5 - 2x = 1$
Gitt $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |5 - 2x - 1| < \varepsilon$

$|f(x) - L| = |5 - 2x - 1| = |4 - 2x| = 2|2 - x| = 2|x - 2| < 2\delta$
($|f(x) - L|$ er nå omformet til å kunne uttrykkes ved $|x - a|$)

La $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (skrives etterpå, for føringens skyld)

$$2|x-2| < 2\delta \Rightarrow |x-2| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2\delta = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} 5 - 2x = 1 \qquad qed$$

Eks: Bruk den formelle definisjonen for grenseverdier til å vise at $\boldsymbol{lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right) = -\frac{1}{2}}$

Gitt $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

$$|f(x) - L| = \left|\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2+x-1}{2(x-1)}\right| = \left|\frac{x+1}{2(x-1)}\right| = \frac{|x+1|}{2|x-1|}$$

La $\delta \leq 1$ (skriv etterpå: La $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$)

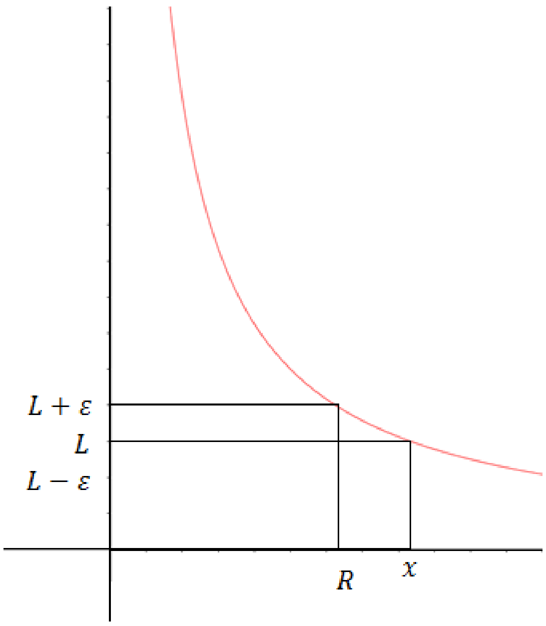
$$\begin{aligned} &|x+1| < 1 \\ &-1 < x+1 < 1 \\ &-3 < x-1 < -1 \\ &3 > |x-1| > 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{|x+1|}{2|x-1|} < \frac{|x+1|}{2*1} < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} \qquad qed$$

Når grensen går mot $\pm\infty$ og funksjonsverdien er et tall (ikke $\pm\infty$)

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ oppfylles hvis:
«Gitt $\varepsilon > 0$, eksisterer det en $R > 0$ slik at $x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$»
(alltid med på oppgavebesvarelsen)



Eks: Bruk den formelle definisjonen av grenseverdier til å bevise at $\boldsymbol{lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1}$

Gitt $\varepsilon > 0$, eksisterer det en $R > 0$ slik at når $x > R \Rightarrow \left|1 + \frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$

La $R = \frac{1}{\varepsilon}$. Da er (skrives etterpå for føringens skyld)

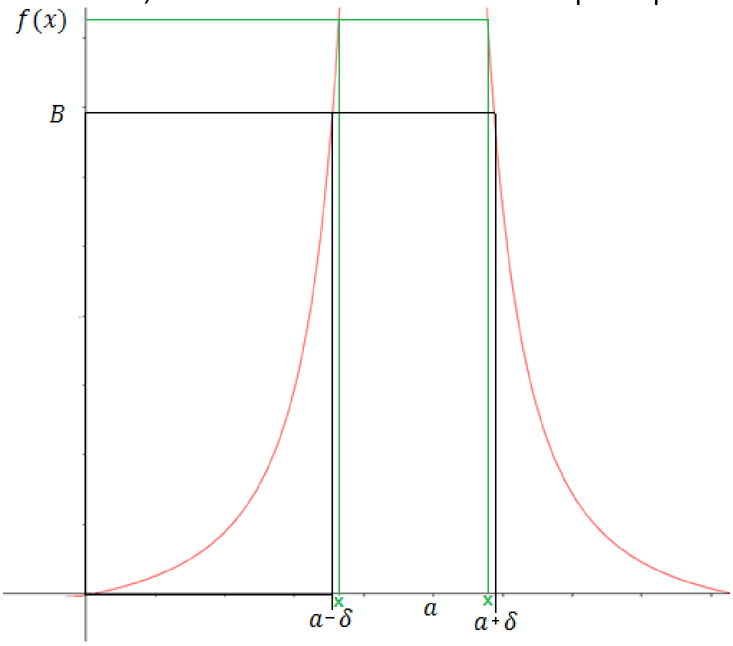
$\left|1 + \frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

$\boxed{\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \text{ fordi } x \to \infty \Rightarrow x \text{ er positiv}}$

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \quad qed$$

Når grensen går mot et tall (ikke $\pm\infty$) og funksjonsverdien går mot $\pm\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ oppfylles hvis:
«Gitt $B > 0$, eksisterer det en $\delta > 0$ slik at $0 < |x - a| < \delta => f(x) > B$»



Eks: Bruk den formelle definisjonen av grenseverdier til å vise at $\boldsymbol{lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty}$

Gitt $B > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at når $x - 1 < \delta => \frac{1}{x-1} > B$

Vi trenger ikke absoluttverditegn på $x - 1 < \delta$ fordi $x - 1 > 0$ når $x > 1$, som den er i dette tilfellet.

$$\frac{1}{x-1} > B => x - 1 < \frac{1}{B}$$

La $\delta = \frac{1}{B}$ (skrives etterpå, for føringens skyld)

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{B}} = B$$

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty \qquad qed$$

Bruk av den formelle definisjonen for grenseverdier i bevis av teoremer

Summen av to grenseverdier:

Vis at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$, så er $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = L+M$.
Vi vil vise at gitt $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik at $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| < \varepsilon$

Bruker trekantulikheten:

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |f(x)-L+g(x)-M| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Da har vi at det eksisterer en δ_1 og δ_2 slik at når $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$
og $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$

Det medfører at

$$|f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad qed$$

Kontinuitetsteorem

f er kontinuerlig i L og $\lim_{x\to c} g(x) = L$. Da er $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f(L) = f(\lim_{x\to c} g(x))$

Bevis:
Gitt $\varepsilon > 0$ og f er kontinuerlig i L, eksisterer det en $\delta > 0$ slik at hvis $0 < |x-c < \delta$
$\Rightarrow |g(x)-L| < \delta_1$. La $g = g(x)$. Da gjelder $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |g(x)-L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g)-f(L)| < \varepsilon$.

Altså er $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \big|f\big(g(x)\big)-f(L)\big| < \varepsilon$, og da er

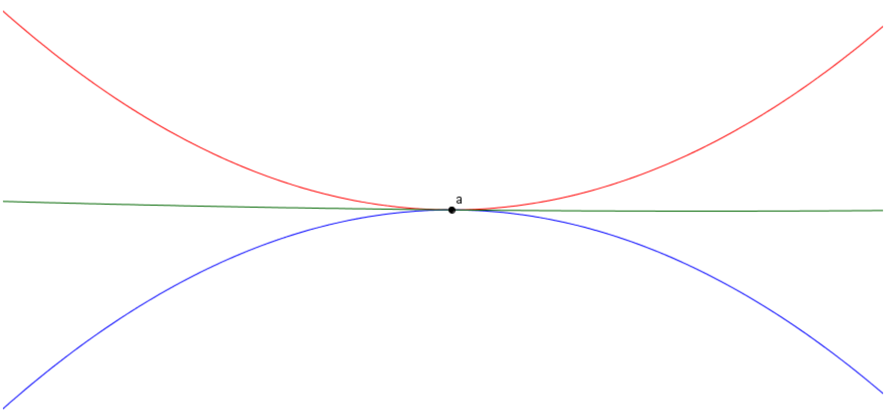
$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f(L) \qquad qed$$

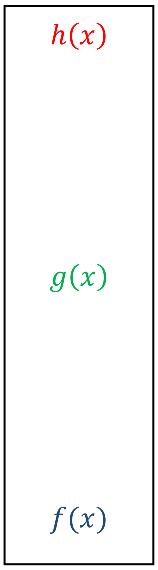
Dette teoremet er også å finne som teorem 7 i kapittel 1.4 i Calculus

Klemmeteoremet/skviseteoremet

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ for alle x på et intervall som inneholder a, bortsett fra muligens i a.
Vi kan bruke klemmeteoremet til å beregne grenser til verdier som i utgangspunktet ikke eksisterer.

Dersom $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, er også $\lim_{x\to a} g(x) = L$.





Eks: Beregn $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\, x^n * sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ for $\boldsymbol{n \geq 1}$

Når $n \geq 1$, er

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$$
$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Da er

$$\left|x^n * \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x^n|$$
$$-|x^n| \leq \left|x^n * \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x^n|$$
$$\lim_{x\to 0} -|x^n| \leq \lim_{x\to 0} x^n * \sin\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0}|x^n|$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^n * \sin\frac{1}{x} \leq 0$$

$=> \lim_{x\to 0} x^n * \sin\frac{1}{x} = 0$ av klemmeteoremet/skviseteoremet

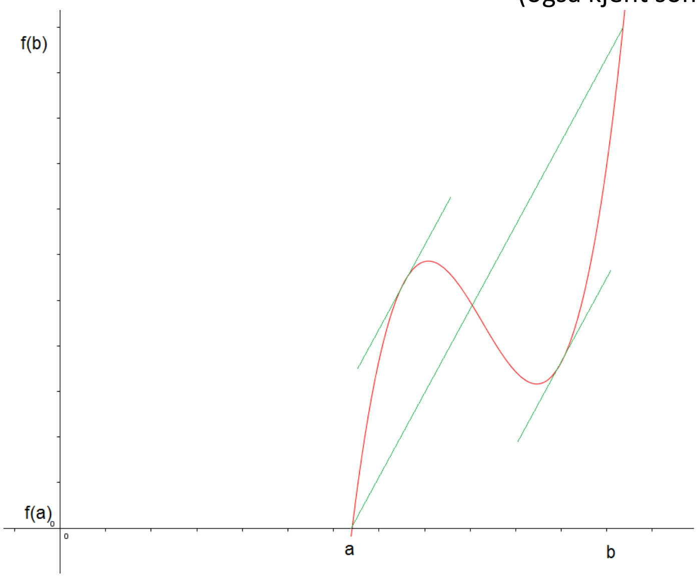
Husk å angi det i besvarelsen dersom du har brukt klemmeteoremet/skviseteoremet til å løse en oppgave.

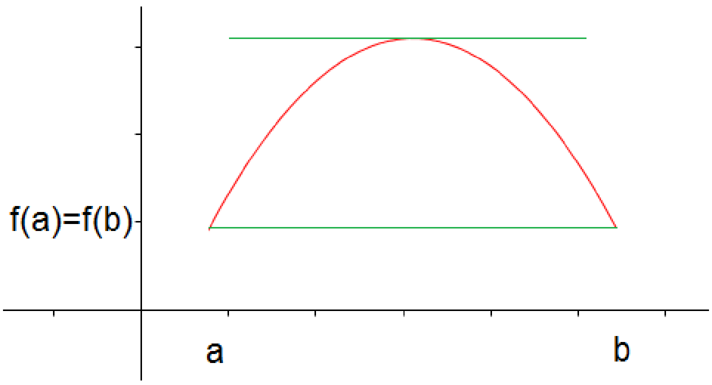
Sekantsetningen (Engelsk: MVT – Mean Value Theorem)

Funksjonen f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b). Da er

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad c \in (a, b)$$

(også kjent som Rolles teorem)





På disse tegningene er den røde streken grafen.

Den grønne streken som går fra $\left(a, f(a)\right)$ til $\left(b, f(b)\right)$ er den gjennomsnittlige stigningen fra $f(a)$ til $f(b)$. De andre grønne strekene er parallelle stigninger til gjennomsnittsstigningen.

Eks: Kan $\cos x = x$ ha mer enn én løsning på intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

$f(x) = \cos x - x$ (sum av en cosinusfunksjon og et polynom som begge er kontinuerlige på intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ og deriverbare på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$)

Vi antar at $f(x_1) = f(x_2) = 0$ for $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, og at $x_1 \neq x_2$

Rolles teorem sier at hvis det stemmer, så er i såfall

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \qquad c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

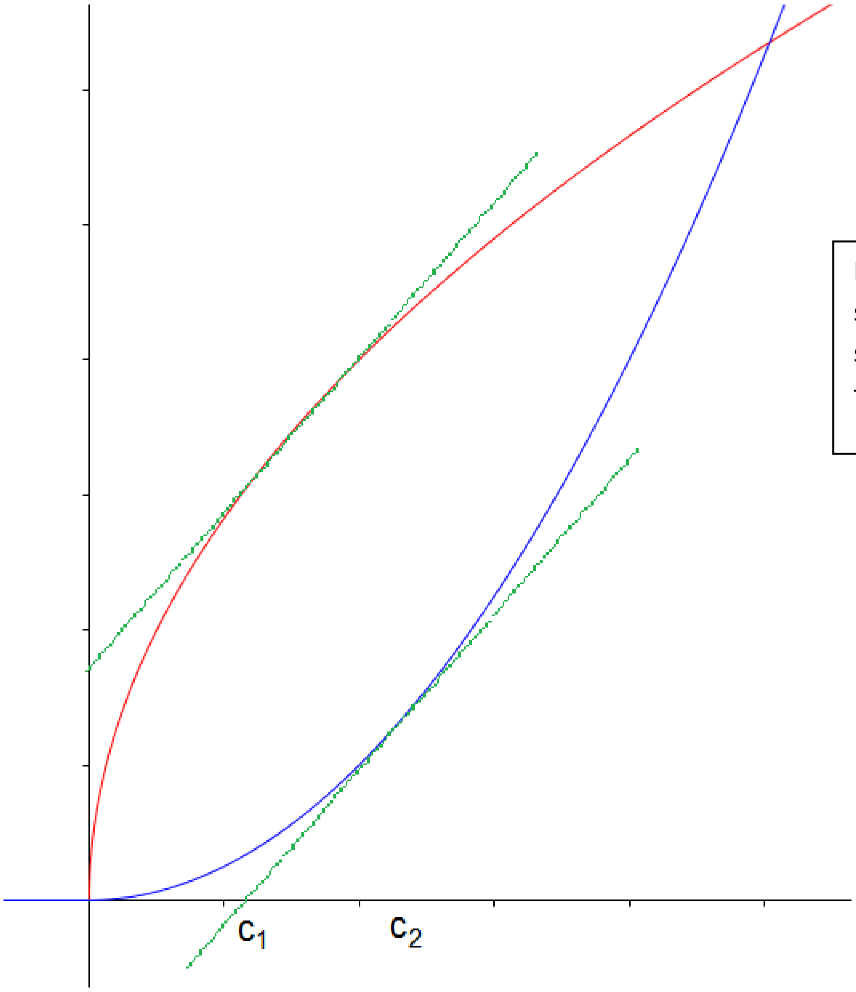
Men $f'(x) = -\sin x - 1 \neq 0$ på $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

=> f har bare ett nullpunkt på intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Den generaliserte sekantsetningen (Generalized MVT)

f og g er kontinuerlige på $[a, b]$ og deriverbare på (a, b).
$g'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a, b)$
Da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Rød og blå strek er grafer. De grønne strekene er tangenter til et punkt på hver sin graf. Tangentene er parallelle i forhold til hverandre.